УДК 514.12

О НЕКОТОРЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ КРЫВЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Галымжанова Д.О.
студент специальности 6B01508 - Прикладная математическое моделирование,
galymzhanovaikt11@gmail.com
Утепқалиев С.У.
Serik.Utepkaliyev@mail.ru
научный – руководитель: профессор Атыоруского университета имени Х.Досмухамедова

Аннотация: В статье рассмотрены виды некоторых замечательных плоских кривых, конические сечения, спирали и вопросы их применения на практике: в строительстве, архитектуре, природе, производстве технических деталей и конструкций. Особое внимание удалено турбокомпрессору и его составному элементу - улитке. Решена задача расчета улитки центробежного компрессора.

Ключевые слова: Замечательные плоские кривые, коническое сечениие, транцендентные кривые, Роза Гвидо Гранди. улитка Паскаля, Спирали, турбокомпрессор, улитка компрессора.

Замечательные кривые - это известные кривые линии, которые часто изучаются в математике, например, эллипс, гипербола и парабола, называемые коническими сечениями. К ним также относятся трансцендентные кривые, такие как спираль Архимеда, кардиоида и циклоида, которые имеют различные интересные математические и геометрические свойства. Отметим, что замечательные кривые получаются при пересечении прямого кругового конуса секущими плоскостями, расположенными с разным наклоном (Рис.1).

.

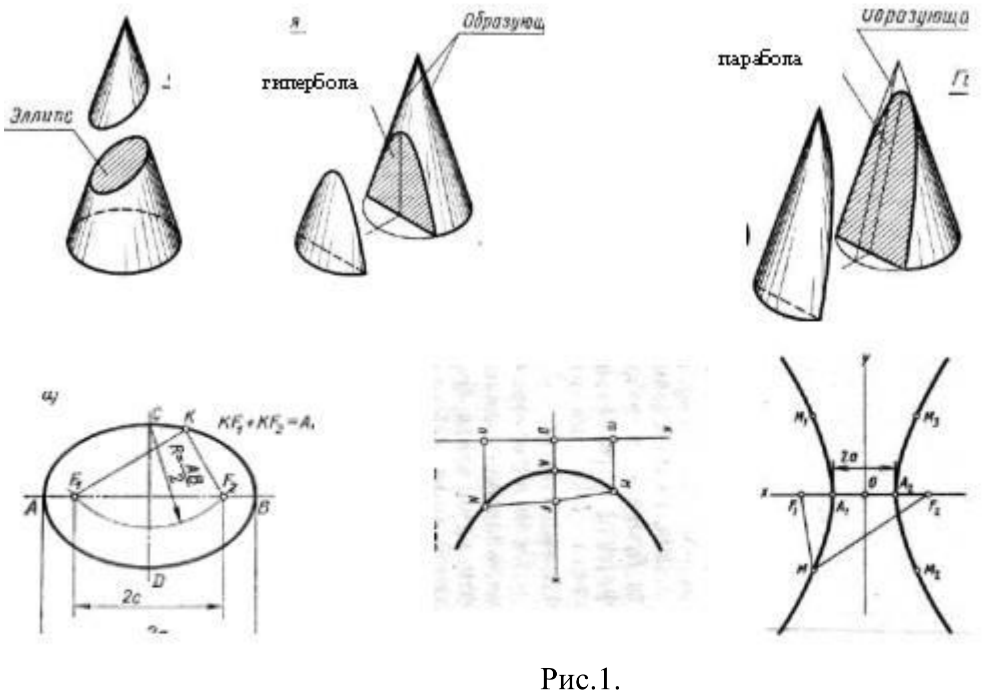


Рис.1.

1. Пересечением конуса наклонной плоскостью, пересекающей все

образующие, получается эллипс, *сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов остаётся постоянной и равной длине большой оси эллипса.*

2. Пересечение конуса наклонной плоскостью, параллельной одной из образующих, получается парабола, *расстояния любо й её точки до фокуса и направляющей равны между собой*.

3. Пересечением конуса плоскостью, расположенной параллельно двум образующим, получается гипербола*, разность расстояний любой точки этой кривой от* F_1 *и* F_2 *будет величиной постоянной и равна* A_1A_2 *и называется действительной осью кривой.*

Все эти кривые выполняют с помощью окружности делением её на равные части.

1. *Эвольвента* – плоская кривая которую описывает точка прямой линии, катящейся без скольжения по окружности. (профиль зубьев зубчатых колёс). Эволютой эллипса есть астероида, что растянута вдоль короткой оси.

2. *Спираль Архимеда* – плоская кривая, являющаяся траекторией точки, вращающейся вокруг некоторого центра и одновременно удаляющаяся от него по закону углового перемещения точки. (спиральные пружины, кулачковые патроны токарных станков)

3. *Синусоида* – это кривая , изображающая изменение тригонометрической функции синуса в зависимости от изменения угла . (графики гармоничных колебательных процессов, винтовая линия) (Рис.2).

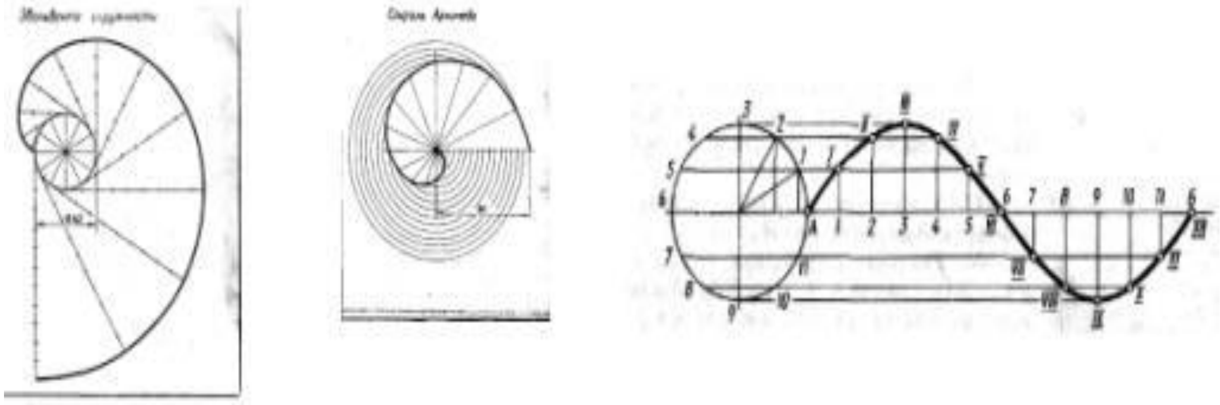


Рис.2.

Обратите внимание на эти рис. 3 с изображением детали кулачка и опоры.

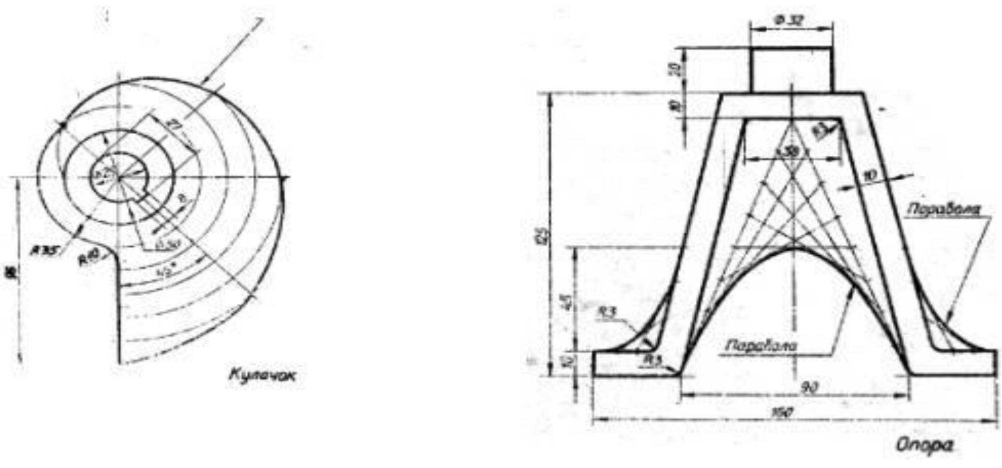


Рис.3.

Какие гипотезы построения детали вы можете выдвинуть?

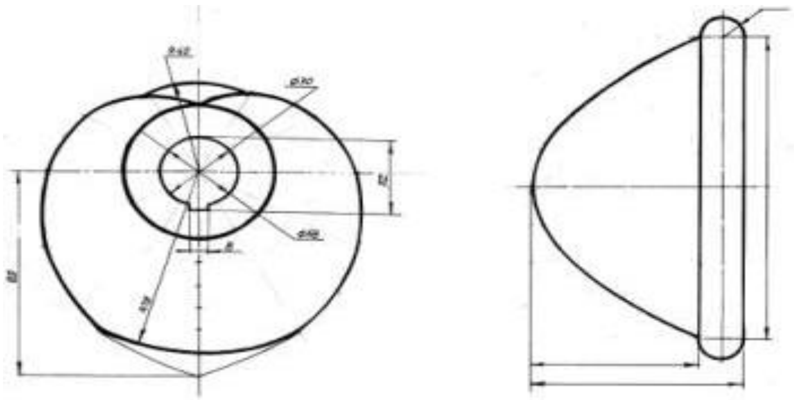


Рис.4.

Рассмотрим одну замечательную кривую, так называемой *Роза Гвидо Гранди (Рис.5)*. Исследовав ее определяем: как изменяются кривые Гвидо Гранди, установим связь между количеством лепестков, их формул и симметричности. Мы замечаем, что большое разнообразие форм «роз» Гвидо Гранди, которые дают фантазию для их применения. С помощью различных кривых в полярных координатах и графических редакторов мы можем сделать, например, различные рисунки, рамки - орнаменты или украсить ими фон открыток.

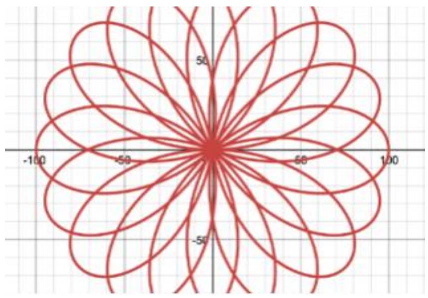


Рис.5. Роза Гвидо Гранди.

Розы Гвидо Гранди и полярная система координат

В 18 веке итальянский геометр Гвидо Гранди (1671-1742) создал кривые линии с точными плавными очертаниями. Они были похожи на цветок. Семейство этих кривых было названо семейством роз Гвидо Гранди. Их точные черты не причуды природы, они предопределены особо подобранными математическими зависимостями. Эти зависимости были подсказаны самой природой, ведь в большинстве случаев абрис листа или цветка представляет собой кривую, симметричную относительно оси.

Применение роз Гранди

Вертикальные линии после того, как к ним применен фильтр (переводящий координаты точек из прямоугольной системы в полярную), стали расходиться из центральной точки.

На бирже: Необычный формат биржевых графиков предложил в 1990-е годы российский математик Владимир Иванович Елисеев Р – цена сделки Ф – время её совершения. Используя такую систему координат, относительно просто связать градусы и время (в году 365 дней, в окружности – 360 градусов).

В военном деле:

Координаты цели могут выдаваться в полярной системе координат (азимут, дальность), прямоугольной (X, Y), геодезической (широта, долгота).

У пчел .Пчелы используют полярные координаты для обмена информацией об источниках пищи. Найдя новый источник пищи, пчела - разведчица возвращается в улей и исполняет танец, на языке которого рассказывает, где находится клумба.

Причём всё это похоже на двухлепестковую розу. Таким образом, пчела - разведчица сообщает другим пчелам полярные координаты нового источника пищи.

В медицине: Компьютерная томография сердца в системе полярных координат.

В системах идентификации человека

Результат преобразования кольца радужной оболочки из декартовой системы координат в полярную. В различных областях науки и техники. Измерительный проектор предназначен для измерения различных параметров в прямоугольной и полярной системах координат. Применяется в измерительных лабораториях и цехах предприятий точного приборостроения, машиностроения, микроэлектроники, в инструментальном производстве, а так же в лабораториях НИИ.

Архимедовая спираль - это плоская кривая, описывающая траекторию точки, которая равномерно движется вдоль луча, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

В полярных координатах она задается уравнением $\rho = a \cdot \varphi$, где расстояние ρ пропорционально углу повороту φ.

Расстояние между её витками всегда остаётся постоянным.

Основные характеристики и свойства:

- ***Уравнение*:** $\rho = a \cdot \varphi$, где a - коэффициент, определяющий расстояние между витками ($a = \frac{u}{\omega}$, где u − линейная, ω − угловая скорость)

- ***Равномерность*:** При повороте луча на один и тот же угол приращение радиуса постоянно.

- ***Ветви*:** Кривая имеет две ветви, соответствующие положительным и отрицательным значениям φ.

- ***История*:** Названа в честь древнегреческого учёного Архимеда, который исследовал её свойства в III веке до н. э.

Применение:

***В технике*:** Используется в кулачковых механизмах, шнеках, гидравлических насосах и для преобразования вращательного движения в линейное. Спираль Архимеда в настоящее время широко используется в технике. Одно из изобретений ученого - винт (прообраз объемной спирали) - использовалось как механизм для передачи воды в оросительные каналы из низколежащих водоемов. Спираль Архимеда имеет тесную связь с последовательностью Фибоначчи. Данный закон математики описывает принцип спирали Архимеда и золотого сечения. Их тесную связь можно наблюдать у многих явлений и элементов природы – в устройстве раковины моллюсков, соцветий подсолнуха и суккулентных растений, фрактальной капусты и сосновых шишек, человека и целых галактик.

Архимедовы спиральные антенны, используемые в связи, обеспечивают независимое от частоты усиление.

Спираль Архимеда в природе:

В природе спираль проявляется в трех основных формах: застывшей (раковины улитки), расширяющейся (изображения спиральных галактик) или сжимающейся (подобие водоворота). Спиральные формы представлены от эволюционных глубин (молекулы ДНК) до законов диалектики. Молекула ДНК закручена двойной спиралью. Гете называл спираль «кривой жизни». Спираль близка к кругу – самой идеальной форме и з всех, что создала природа . Стихийные и природные элементы, имеющие форму спирали, очень распространены в природе. Это спиральные туманности, галактики, водовороты, смерчи, торнадо, устройства растений.

- В *дизайне*: Применяется в орнаментах и при проектировании деталей типа «улитка».

Виды спирали:

1. Плоская спираль:

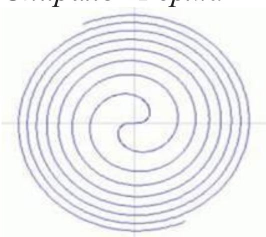
1) Архимедова спираль,
2) Спираль Ферма,
3) Гиперболическая спираль,
4) Логарифмическая спираль,
5) Спираль Фиббоначчи и золотая спираль,
6) Спираль Корню.

Теория построения Архимедовой спирали. Для построение Архимедовой спирали в поляной системе координат полярный угол φ>0 (принимает только положительные значения) мы получаем правую спираль. В другой полярной системе изобразим левую спираль. Левая спираль выглядит следующим образом φ<0 (принимает только отрицательные значения) и мы получаем левую спираль (рис. 6).

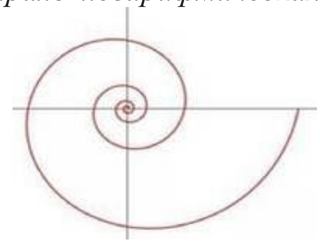
Рис. 6.

В ниже показаны виды некоторых спиралов.

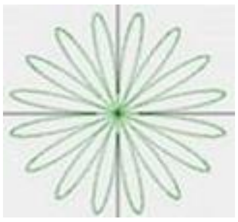
Спираль Ферма



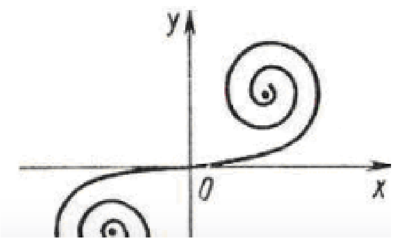
Спираль логарифмическая



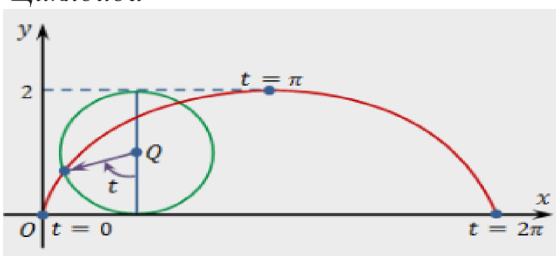
Полярная роза Гридо Гранди



Клотоида или спираль Корню



Циклоида



Кардоида и улитка Паскаля

Рис.7.

Еще одно из устройств, внешне напоминающих логарифмическую спираль, а, возможно, и эвольвенту окружности (Рис.8, *а*, б) – улитка турбокомпрессора (Рис.9).

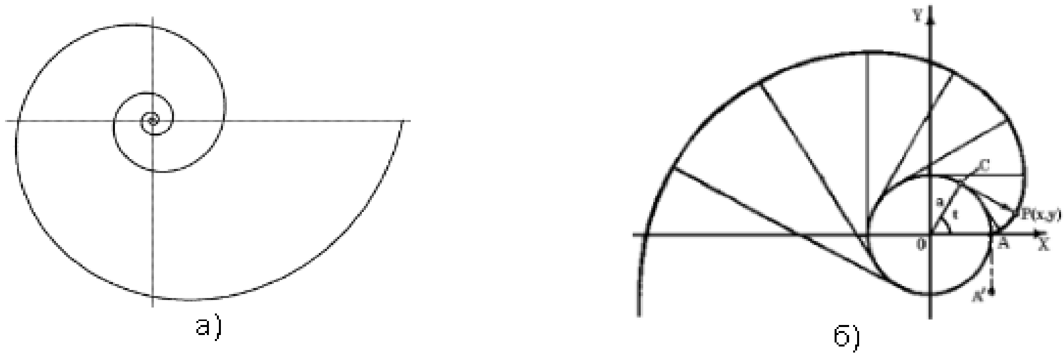


Рис.8.

Турбокомпрессор предназначен для подачи воздуха в дизель под избыточным давлением с целью увеличения его мощности и экономичности, а улитка компрессора, устройство, через которое всасывается и нагнетается воздух.

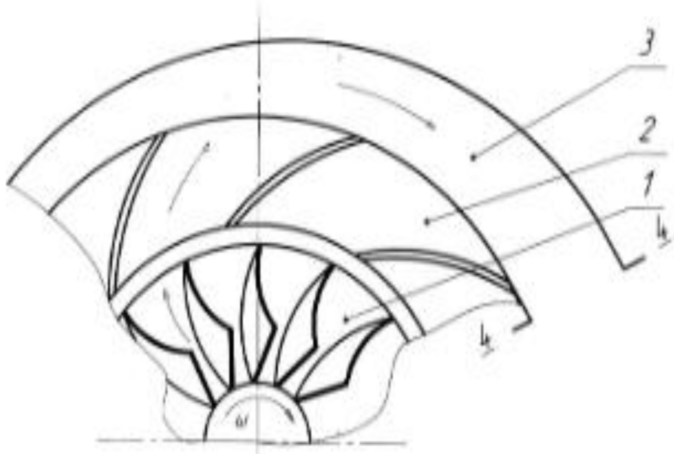


Рис.9,. 1 - рабочая колесо, 2 – диффузор, 3 – улитка, 4–4 - сечение на выходе из улитки.

Поставим перед собой следующую задачу: Разработать улитку, у которой площадь на выходе была бы равна площади входа в компрессор.

На рис.8 показана схема улитки центробежного компрессора. Угол φ отситываетс от начального сечения улитки до полного разворота (0° - 360°). Величина R_{φ} представляет собой радиус центра тяжести проходного сечения улитки.

Сечение 5–5 характеризует наибольшую площадь улитки. Далее сечение улитки переходит в расширяющийся патрубок. Его длина обозначена как L_n , а выходное сечение обозначено через К-К.

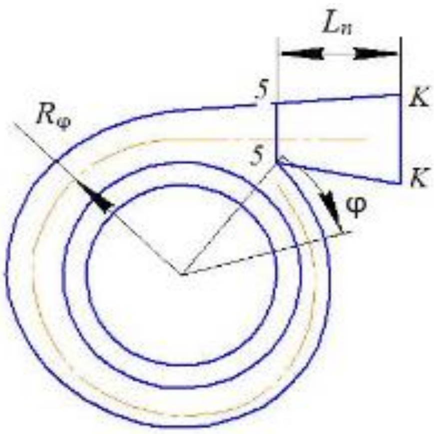


Рис.10. Схема улитки центробежного компрессора.

Проводим расчет улитки.

1. Площадь водного отверстия рассчитывается по формуле: $S_{вход} = \frac{\pi d^2_{вход}}{4}$.

2. При $d_{вход} = 5$см. *а)* диаметр колеса равен 7 см.

б) диаметр диффузора равен 10 см.

3. Тогда на выходе площадь улитки равна входному отверстию что составляет : $S_{вход} = \frac{\pi d^2_{вход}}{4} = \frac{3.14 \cdot 5^2}{4} = 19{,}625$ (см^2).

Зависимость изменения площади улитки от угла φ разворота представлена в следующей таблице.

S_{φ}	$0{,}1S_{\varphi}$	$0{,}1S_{\varphi}$	$0{,}25S_{\varphi}$	$0{,}35S_{\varphi}$	$0{,}45S_{\varphi}$	$0{,}55S_{\varphi}$	$0{,}65S_{\varphi}$	$0{,}8S_{\varphi}$	$0{,}9S_{\varphi}$	$1{,}0S_{\varphi}$
φ^0	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360

$S_5 = 19{,}625$ с^2 график зависимости S_{φ} от угла φ напоминает прямую линию.

Тогда в соответствии с отображенной в таблице зависимостью S = S(φ) можно вычислить радиус в каждой из этих точек. Воспользуемся формулой $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$,

Для удобства можно занести все значения R в следующую таблицу.

φ	0	40	80	120	160	200	240	260	320	360
R	0	0,79	1,25	1,479	1,677	1,85	2,016	2,236	2,372	2,5

Анализ свойств замечательных кривых и их применение в практической и производственной деятельности различного характера, приведенный в данной работе, показал, что замечательные кривые весьма разнообразным и обладают огромным прикладным потенциалом, поскольку, опираясь на их свойства, можно разрабатывать разного конструкции и детали в технике и машиностроении, строительстве и архитектуре, наблюдать их проявление в природных явлениях и в быту.

Использованная литература

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. Л. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов., М.: Гостехиздат., 1967.

2. Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин. Математическая шкатулка. М., Просвещение, 1988.

3. Я.И. Перельман. Занимательные задачи и опыты. Домодедово, ВАП, 1994.

4. *Болтянский В.Г.*, *Ефремович В.А.* Наглядная топология. - М.: Наука, 1982, 160 стр.

5. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. - Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 496 стр. -

6. Кривые. // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). - СПб., 1907.

7. Прокин Ю.М. Практическое применение свойств некоторых математических кривых. // Научно - методический электронный журнал «Концепт» - 2017, Т.30, стр. 2011-2015.